CONCOURS 1978

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

N.B. — *Il sera tenu compte de l'écriture, de la présentation, de la rédaction.*

On considère un plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I

Soit l'équation différentielle

$$y + xy'^2 = 0$$

où y est une fonction de la variable x.

1° Montrer que la famille des courbes intégrales (C_k) admet pour équation :

$$(x + y)^2 + 2k(y - x) + k^2 = 0 \qquad (k \text{ paramètre réel}).$$

2° *a.* Pour tous réels k_1 et k_2, préciser la transformation géométrique simple qui transforme (C_{k_1}) en (C_{k_2}).

b. Quelle est la nature des courbes (C_k)? On précisera les éléments remarquables de ces courbes.

c. Quelle est l'enveloppe de la famille (C_k)? *

3° Montrer qu'il existe un et un seul réel k_0 tel que la courbe intégrale (C_{k_0}) passe par $A(0, -1)$ et $B(1, 0)$.

Quelle est la longueur de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ porté par (C_{k_0})? En donner la valeur exacte et une valeur approchée à 2×10^{-3} près.

II

Dans cette partie, on étudie les trajectoires orthogonales* des courbes (C_k) de I :

1° Montrer que la famille des trajectoires orthogonales des courbes (C_k) est la famille des courbes (Γ_μ) d'équation :

$$(x^3 + y^3 + \mu)^2 = 4\mu x^3 \qquad (\mu \text{ paramètre réel}).$$

2° Pour tous réels μ_1 et μ_2, quelle transformation géométrique simple transforme (Γ_{μ_1}) en (Γ_{μ_2})?

3° Étude particulière de $\left(\Gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}\right)$ correspondant à $\mu = -\frac{1}{4}$:

a. Donner une représentation paramétrique de $\left(\Gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}\right)$ en fonction du paramètre $t = x^3 + y^3$.

b. Faire l'étude complète de cette courbe définie paramétriquement. Préciser en particulier les points singuliers, les branches infinies.

c. Calculer le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure au point H de $\left(\Gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}\right)$ situé sur la droite d'équation $y = -x$.

d. Tracer la courbe $\left(\Gamma_{\left(-\frac{1}{4}\right)}\right)$ en prenant $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 5$ cm.

* Notion hors programme (Note de l'U.P.S.)

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail